

THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 8

Exercice 1. *À faire après chaque cours !*

Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercice 2. (facile) Les groupes suivants sont-ils résolubles ? Si oui, écrivez une série sous-normale avec des quotients abéliens pour chacun.

- (1) \mathbb{Z}
- (2) S_3
- (3) S_4
- (4) D_{2n} pour tout n .
- (5) $G \times H$, où G et H sont des groupes résolubles.

Exercice 3. (facile) Soient G et H des groupes nilpotents, montrez alors que $G \times H$ est aussi un groupe nilpotent.

Exercice 4. (facile) Soit G un groupe quelconque. Rappelez-vous qu'un automorphisme d'un groupe G est simplement un isomorphisme $G \rightarrow G$. On dit qu'un sous-groupe $H \subseteq G$ est appelé sous-groupe caractéristique si $\varphi(H) = H$ pour tous les automorphismes φ de G .

- (1) Montrez qu'un sous-groupe caractéristique de G est toujours un sous-groupe normal.
- (2) Montrez que $Z(G)$, le centre de G , est un sous-groupe caractéristique de G .
- (3) Montrez que $[G, G]$, le sous-groupe des commutateurs de G , est un sous-groupe caractéristique de G .

Exercice 5. (moyen) Soit G un p -groupe fini, montrez alors que G est résoluble.

Exercice 6. (moyen)

- (1) Soit G un groupe simple qui est aussi résoluble. Montrez que G doit être abélien. Concluez que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p .
- (2) Montrez qu'un groupe résoluble ayant une série de composition est nécessairement fini.
- (3) Montrez qu'un groupe fini est résoluble si et seulement si ses facteurs de composition sont des groupes cycliques d'ordre premier.

Exercice 7. (moyen) Soit k un corps quelconque. Considérons le groupe B des matrices triangulaires supérieures inversibles 2×2 sur k :

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in k^\times, b \in k \right\}.$$

Montrez que B est un groupe résoluble en exhibant une série sous-normale pour B avec des quotients abéliens.

Exercice 8. (difficile) L'objectif de cet exercice est de montrer que $A_n \triangleleft S_n$ est le seul sous-groupe normal non trivial de S_n pour $n \geq 5$. Soit donc $1 \neq H \triangleleft S_n$ un sous-groupe normal non trivial.

- (1) Montrez que le centre de S_n est trivial pour $n \geq 3$.

Indice : Écrivez $\alpha \in S_n$ comme un produit de cycles disjoints et construisez $\beta \in S_n$ tel que

$$\alpha^{-1}\beta\alpha \neq \beta.$$

- (2) Supposez que $H \cap A_n = 1$. Montrez que H contient un élément σ d'ordre 2, et que σ est en fait le seul élément non trivial, c'est-à-dire que H est un sous-groupe d'ordre 2.
- (3) En utilisant le premier point, trouvez une contradiction en montrant que $\sigma = 1$.
- (4) Concluez.